CONTROLE E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NO R^n

Andressa Gomes (bolsista do PIBIC/CNPq), Alexandro Marinho Oliveira (Orientador, Departamento de Matemática – UFPI-Parnaíba)

Introdução

Muitas situações reais envolvem relações e taxas segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais. Por isso o estudo de equações diferenciais é importante, a fim de que os processos físicos e naturais possam ser modelados matematicamente e através da solução ou aproximação de seus modelos possa ser feito a intervenção humana obtendo os resultados desejados.

Entretanto a maioria dos fenômenos físicos é regida por equações de ordens mais altas e estas podem ser transformadas em um sistema de equações lineares de primeira ordem. Desta maneira o estudo da controlabilidade do sistema pode ser iniciado e verificado se o sistema atende as condições de controlabilidade de Kalman, que é o principal resultado deste trabalho.

Metodologia

A metodologia usada no trabalho foi a leitura e discussão de textos presentes na literatura, a apresentação de seminários semanais pelos orientandos que foram assistidos pelo professor orientador, onde foi possível dirimir dúvidas e consolidar os conhecimentos necessários para o progresso dos estudos.

Resultados e discussão

1. Equações Diferenciais

Para equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \tag{1.1}$$

quando *p(t)* é constante, podemos usar o método dos fatores integrantes cuja solução é expressa por:

$$Y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right]$$

Onde, μ(s) é um fator integrante.

Equações do tipo $M(x) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0$ são ditas equações separáveis e aliadas a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, possuem uma representação implícita de sua solução na equação: $\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0$.

E por último para equações de primeira ordem foram vistos o método de solução para equações exatas e as condições necessárias para a existência e unicidade das soluções de problemas de valor inicial de equações de primeira ordem.

No estudo de equações lineares de segunda ordem foram feitas algumas análises entre suas soluções e o conceito de dependência linear, além das propriedades do wronskiano. Quando a equação linear possui coeficientes constantes, ou seja, é da forma $ay'' + by' + cy = 0$, a solução depende das raízes de sua equação característica $ar^2 + br + c = 0$, sendo $y = c_1 e^{tr_1} + c_2 e^{tr_2}$, se $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$; $y = c_1 e^{tr_1} + c_2 t e^{tr_1}$, se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$; $y = e^{\lambda t}[c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)]$, se r_1, r_2 são conjugados complexos $\lambda \pm \mu i$.

Por fim, para equações lineares de segunda ordem há o método da variação dos parâmetros.

2. Séries Numéricas

Para que uma série seja convergente é necessário que seu termo geral tenda a zero, entretanto esta não é uma condição suficiente, como podemos verificar na série $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$.

A divergência da p-série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$, para 0 < p ≤ 1 pode ser mostrada pelo critério de comparação com a série harmônica.

O critério de Leibniz é uma forte ferramenta para o estudo da convergência de séries alternadas, assim dada a série alternada $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$, se a_n é uma sequência decrescente de termos positivos que tendem a zero, então a série dada é convergente.

Outros dois testes, o de d'Alembert e o de Cauchy são extremamente úteis para a verificação da convergência ou não de séries numéricas

3. Sequências e Séries de Funções

As propriedades da convergência uniforme como a continuidade da soma, a integração termo a termo e a derivação termo a termos são essenciais para o estudo de uma das séries de funções mais importante da Análise, a série de potências dada por:

$$\sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n$$

Onde x_0 é chamado centro da série.

Quando uma função real *f* é desenvolvível em série de potências em um intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, podemos obter para todo *x* neste intervalo a série

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Que é a série de Taylor de *f* em torno de x_0.

4. Espaços Euclidianos

A definição de espaços métricos e algumas noções de sequências no R^n são necessárias para dar subsídio a algumas demonstrações presentes nos capítulos seguintes.

5. Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Um sistema de equações diferenciais, sempre pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem cuja equação matricial pode ser escrita como $x' = A(t)x + b(t)$. Quando os elementos da matriz *A(t)* e do vetor *b(t)* são funções contínuas em um intervalo *I*, existe uma única solução $\varphi(t)$, definida em *I*, que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0) = x_0, \forall\, t_0 \in I$.

Se $\phi(t)$ é uma matriz fundamental da equação homogênea $x' = A(t)x$, então a solução $\varphi(t)$ da equação não homogênea $x' = A(t)x + b(t)$, com $\varphi(t_0) = x_0$ é dada por $\varphi(t) = \phi(t)\left[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)b(s)ds\right]$.

A exponencial da matriz *A*, com entradas reais é definida por $e^{tA} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k A^k}{k!}$.

6. Controlabilidade Exata

O conjunto controlável *C* é o conjunto dos pontos que podem ser levados à origem num tempo finito. Quando $C = \mathbb{R}^n$ diz-se que o sistema é completamente controlável. Dado o problema de valor inicial

$$x' = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x(0) = x_0$$

se $x_0 \in C(t_1), \exists\, u \in$ $tal\ que\ x(t_1) = 0$ e $x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)ds.$

A matriz controlabilidade *M* do problema de valor inicial dado acima é dado por

$$M = [B\ Ab\ A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

Onde *A* é uma matriz n x n e B é uma matriz n x m.

A condição de controlabilidade de Kalman nos diz que se posto(*M*) = n é o controle *u* é ilimitado, então $C = \mathbb{R}^n$, ou seja, o sistema é completamente controlável.

Conclusão

Apresentamos o principal resultado que diz respeito a condição de controlabilidade de Kalman. Procurou-se mostrar alguns exemplos de fenômenos físicos que são abordados através de sistemas lineares a fim de mostrar a aplicabilidade dos conteúdos expostos.

Referências bibliográficas

[1] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Equações diferenciais Elementares e problema de valores de contorno. 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[2] Guidorizzi, H. L. Um curso de Cálculo, V4. 5.ed. Rio de Janeiro-RJ: LTC, 2002.

[3] Leithold, L. O cálculo com geometria Analítica, V1.3ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[4] Leitão, A.; Silva, G. N. Tópicos em teoria do controle. Notas, 2004.1-97. Disponível em <http://www.bienasbm.ufba.br/M44.pdf >.

[5] Lima, E. L. Análise real 1, V.1. 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. Coleção Matemática Universitária. ISBN 978-85-244-0048-3.

[6] Lima, E. L. Curso de análise, V.1. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Projeto Euclides. ISBN 978-85-244-0118-3.

[7] Lima, E. L. Espaços Métricos. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Projeto Euclides. ISBN 978-85-244-0158-9.

[8] Domingues, Higino H. Espaços métricos e introdução à topologia. São Paulo: Atual, 1982.

[9] Lima, E. L. Análise Real, V.2. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Coleção Matemática Universitária. ISBN 978-85-244-0221-0.

[10] Boldrini, José Luis, et al. 3.ed. São Paulo: Haper & Row do Brasil,1980.

[11] Micu, S.; Zuazua, E. An Introduction to the Controllability of Partial Di_erential Equations. Disponível em: <http://inf.ucv.ro/~ micu/sorin _les/cont.pdf>. Acesso em: 12 junho
2010.

Palavras chaves: Equações diferenciais. Sistemas lineares. Controlabilidade.